Lösungen zu den Übungsaufgaben im Buch *Lineare Algebra: Eine anwendungsorientierte Einführung* von Andreas Müller, ISBN 978-3-662-67865-7, https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-662-67866-4, Website zum Buch: https://linalg.ch

Kapitel 6: Affine Vektorgeometrie

6.1. Kann der Vektor

$$v = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

als Linearkombination der Vektoren

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \text{und} \qquad u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

linalg.ch/gauss/67

geschrieben werden? Wenn ja, finden Sie die Koeffizienten, wenn nein, warum nicht? Bilden die Vektoren u_i eine Basis?

Lösung. Wenn die gesuchte Darstellung möglich ist, dann gibt es Zahlen x_1, x_2 und x_3 mit der Eigenschaft, dass

$$v = x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3.$$

Diese Zahlen kann man finden als Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & -4 & -5 \\ 2 & -1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Mit dem Gauß-Algorithmus ergibt sich:

$$\begin{array}{|rrr|r|} \hline 1 & 2 & 1 & 2 \\ -3 & -4 & -5 & -5 \\ 2 & -1 & 7 & 3 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|rrr|r|} \hline 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -5 & 5 & -1 \\ \hline \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{array}{|rrr|r|} \hline 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} \\ \hline \end{array}$$

Aus dieser Rechnung kann man ablesen, dass das Gleichungssystem singulär ist. Insbesondere sind die drei Vektoren linear abhängig und spannen daher nicht den ganzen Raum $\mathbb{R}^3$ auf, sondern nur eine Ebene im dreidimensionalen Raum. Die Vektoren u_i bilden daher keine Basis. Außerdem kann man aus der letzten Zeile sehen, die der Gleichung $0 = \frac{3}{2}$ entspricht, dass das Gleichungssystem keine Lösung hat. Die gesuchte Darstellung ist also nicht möglich, da sich der Vektor v außerhalb des von den Vektoren u_i aufgespannten Raumes befindet. ○

6.2. Finden Sie die Transformationsmatrix T, welche Koordinaten in der Basis

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 2\\0\\1\\2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4\\-1\\5\\4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3\\1\\0\\5 \end{pmatrix} \right\}$$

in Koordinaten in der Basis

$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} -4\\-1\\5\\4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5\\0\\6\\11 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6\\1\\-4\\-2 \end{pmatrix} \right\}$$

linalg.ch/gauss/68

umrechnet. Bestimmen Sie außerdem die Koordinaten x_i des Vektors

$$v = \begin{pmatrix} 3\\2\\-4\\3 \end{pmatrix}$$

linalg.ch/gauss/69

in der Basis $\mathcal{B}$ und rechnen Sie sie mit der Transformationsmatrix in Koordinaten in der Basis $\mathcal{C}$ um. Kontrollieren Sie Ihr Resultat.

Lösung. Die Transformationsmatrix kann mit Hilfe des Gaussalgorithmus gefunden werden:

$$\begin{array}{|rrr|rrr|}
\hline
\multicolumn{3}{|c|}{\mathcal{C}} & \multicolumn{3}{c|}{\mathcal{B}} \\
\hline
-4 & -5 & 6 & 2 & -4 & -3 \\
-1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\
5 & 6 & -4 & 1 & 5 & 0 \\
4 & 11 & -2 & 2 & 4 & 5 \\
\hline
\end{array}
\rightarrow
\begin{array}{|rrr|rrr|}
\hline
\multicolumn{3}{|c|}{\mathcal{C}} & \multicolumn{3}{c|}{\mathcal{B}} \\
\hline
1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\
\hdashline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
\end{array}$$

Daraus kann man ablesen, dass die Transformationsmatrix

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ist. Der Vektor v kann tatsächlich in der Basis $\mathcal{B}$ ausgedrückt werden, dazu löst man das Gleichungssystem

$$\begin{array}{|rrr|r|}
\hline
\multicolumn{3}{|c|}{\mathcal{B}} & \\
\hline
2 & -4 & -3 & 3 \\
0 & -1 & 1 & 2 \\
1 & 5 & 0 & -4 \\
2 & 4 & 5 & 3 \\
\hline
\end{array}
\rightarrow
\begin{array}{|rrr|r|}
\hline
\multicolumn{3}{|c|}{\mathcal{B}} & \\
\hline
1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 1 & 1 \\
\hdashline
0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
\end{array}$$

Die rote 0 zeigt an, dass das Gleichungssystem lösbar ist, die Koordinaten von v in der Basis $\mathcal{B}$ sind

$$x = \begin{pmatrix} 1\\-1\\1 \end{pmatrix}.$$

Mit der Matrix T erhält man daraus die Koordinaten

$$y = Tx = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Zur Kontrolle kann man mit den eben gefundenen Koordinaten y den zugehörigen Vektor in $\mathbb{R}^4$ nachrechnen, es sollte sich v ergeben. Die Rechnung ergibt

$$Cy = \begin{pmatrix} -4 & -5 & 6 \\ -1 & 0 & 1 \\ 5 & 6 & -4 \\ 4 & 11 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

○

6.3. Statt der Standardbasis soll die Basis aus den Vektoren

$$b'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad b'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

verwendet werden. Dazu müssen zu Koordinaten $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ in der Standardbasis die neuen Koordinaten in der Form

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

gefunden werden. Bestimmen Sie die Matrix T.

Lösung. Für die Transformation von B-Koordinaten in B'-Koordinaten verwendet man das Gauss-Tableau:

$$\begin{array}{|rr|rr|} \hline 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|rr|rr|} \hline 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|rr|rr|} \hline 1 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \hline \end{array}$$

Daraus liest man die Transformationsmatrix

$$T = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

ab. ○

Diskussion. Die etwas konventionellere Methode, die Transformationsmatrix zu bestimmen, drückt zunächst die Vektoren b'_i durch die Standardbasisvektoren aus:

$$\begin{aligned} b'_1 &= e_1 - e_2 \\ b'_2 &= e_1 + 2e_2 \end{aligned}$$

Für die Transformationsmatrix in Richtung $\{b'_1, b'_2\} \rightarrow \{e_1, e_2\}$ muss die transponiert Koeffizientenmatrix davon verwendet werden:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Die verlangte Transformation verläuft jedoch in die entgegengesetzte Richtung, man braucht also die inverse Matrix

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix},$$

wie man zum Beispiel mit dem Gauss-Algorithmus finden kann.

6.4. Die Lösungsmenge des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 4x + 8y - 12z &= 16 \\ 7x + 17y - 15z &= 7 \end{aligned}$$

linalg.ch/gauss/71

ist eine Gerade.

a) Verwenden Sie den Gauss-Algorithmus, um dafür eine Parameterdarstellung zu finden.

b) Schneidet diese Gerade die Gerade mit der Parameterdarstellung

$$\begin{pmatrix} -18 \\ 19 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

linalg.ch/gauss/72

und wenn ja, in welchem Punkt?

Lösung. a) Wir Lösen das Gleichungssystem mit dem Gauss-Algorithmus:

$$\begin{array}{|ccc|c|} \hline x & y & z & \\ \hline 4 & 8 & -12 & 16 \\ 7 & 17 & -15 & 7 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|ccc|c|} \hline x & y & z & \\ \hline 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 3 & 6 & -21 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|ccc|c|} \hline x & y & z & \\ \hline 1 & 0 & -7 & 18 \\ 0 & 1 & 2 & -7 \\ \hline \end{array}$$

Die dritte Variable ist offenbar frei wählbar, wir nenne Sie s, obwohl sie natürlich mit der Variablen z übereinstimmt. Die Lösungsmenge ist

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 18 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, s \in \mathbb{R} \right\},$$

also genau eine Parameterdarstellung einer Geraden.

b) Um den Schnittpunkt zu finden, verwenden wir das Gausstableau

$$\begin{array}{|ccccc|c|} \hline x & y & z & s & t & \\ \hline 1 & 0 & 0 & -7 & 0 & 18 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & -18 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 19 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 7 \\ \hline \end{array} \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{array}{|ccccc|c|} \hline x & y & z & s & t & \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array},$$

in dem die vierte Spalte für die Variable s steht und die fünfte Spalte für t. Aus diesem Tableau kann man ablesen, dass ein Schnittpunkt existiert, dass er für $s = -3$ und $t = -5$ erfolgt, und dass der Schnittpunkt $S = (-3, -1, -3)$ ist. ○

6.5. Finden Sie eine Parameterdarstellung der Schnittgeraden der Ebenen durch die Punkte $A = (6, 4, 7)$, $B = (9, 2, 9)$ und $C = (1, 7, 0)$ bzw. $P = (2, 2, 4)$, $Q = (6, 13, 4)$, und $R = (1, 3, 7)$.

linalg.ch/gauss/73

Lösung. Wir benötigen zunächst Parameterdarstellungen für die Ebenen:

$$\begin{pmatrix}6\\4\\7\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}3\\-2\\2\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-5\\3\\-7\end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix}2\\2\\4\end{pmatrix} + u\begin{pmatrix}4\\11\\0\end{pmatrix} + v\begin{pmatrix}-1\\1\\3\end{pmatrix}$$

Dies sind sechs Gleichungen mit sieben Unbekannten x, y, z, u, v, s, t:

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\4\\7\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}3\\-2\\2\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-5\\3\\-7\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\\4\end{pmatrix} + u\begin{pmatrix}4\\11\\0\end{pmatrix} + v\begin{pmatrix}-1\\1\\3\end{pmatrix}$$

Das zugehörige Gauss-Tableau ist:

x	y	z	t	s	u	v	
1	0	0	-3	5	0	0	6
0	1	0	2	-3	0	0	4
0	0	1	-2	7	0	0	7
1	0	0	0	0	-4	1	2
0	1	0	0	0	-11	-1	2
0	0	1	0	0	0	-3	4

Wendet man den Gauss-Algorithmus darauf an, ergibt sich

x	y	z	t	s	u	v	
1	0	0	0	0	0	1	$\frac{10}{3}$
0	1	0	0	0	0	-1	$\frac{17}{3}$
0	0	1	0	0	0	-3	4
0	0	0	1	0	0	2	$-\frac{1}{3}$
0	0	0	0	1	0	1	$\frac{1}{3}$
0	0	0	0	0	1	0	$\frac{1}{3}$

Aus den ersten drei Zeilen kann man die Lösung ablesen:

$$\left\{ \begin{pmatrix}\frac{10}{3}\\\frac{17}{3}\\4\end{pmatrix} + v\begin{pmatrix}-1\\1\\3\end{pmatrix} \,\middle|\, v \in \mathbb{R} \right\}.$$

Die unteren drei Zeilen braucht man nicht, sie geben die Abhängigkeit der Variablen t, s und u von v wieder. ○