Telezentrisches Objektiv

Ergänzung zum Abschnitt 3.B Matrixoptik

Dies ist ein Ergänzungsartikel zum Buch *Lineare Algebra: Eine anwendungsorientierte Einführung*, von Andreas Müller. Erschienen im Verlag Springer-Vieweg, ISBN 978-3-662-67865-7 und ISBN 978-3-662-67866-4 (eBook).

https://doi.org/10.1007/978-3-662-67866-4

Website zum Buch: https://linalg.ch

Springer-Link: https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-662-67866-4

Telezentrisches Objektiv

Andreas Müller

Zusammenfassung

Die in Kapitel 10 behandelte Kameraabbildung ist in speziellen Anwendung der *Computer Vision* genau wegen der perspektivischen Verzerrungen nicht geeignet. Mit einem sogenannten telezentrischen Objektiv ist es möglich, die perspektivesche Verzerrung vollständig zu eliminieren. In diesem Ergänzungskapitel wird ein einfaches telezentrisches Objekt mit der Technik der Matrixoptik aus Abschnitt 3.B modelliert.

1 Perspektive und Computer Vision

Ein konventionelles Objektiv funktioniert wie eine Lochkamera (siehe Kapitel 10). Die Lichtstrahlen vom Objekt kreuzen sich im Objektiv und werfen ein gespiegeltes Bild auf die Bildebene (Abbildung 1 links). Gleich große, aber verschieden weit vom Objektiv entfernte Objekte werden verschieden groß abgebildet (Abbildung 2 links).

Die Prinzipien der Zentralperspektive bewirken, dass parallele Linien im Bild nicht mehr parallel sind, sondern sich in einem Fluchtpunkt scheiden. Ein Gegenstand, der parallel zur Bildebene verschoben wird, kann sein Aussehen verändern, weil die eine oder andere Seite des Gegenstandes sichtbar wird (Abbildung 3). Auch dieser Effekt erschwert die Bildbearbeitung in *Computer Vision* Anwendungen.

Für technische Anwendungen kann es daher eine große Vereinfachung sein, wenn die Abbildung mit Hilfe paralleler Lichstrahlen erfolgt, wie dies in Abbildung 1 rechts dargestellt wird. Da die einfallenden Strahlen parallel sind, wird ein Gegenstand unabhängig von der Entfernung vom Objektiv immer gleich groß dargestellt (Abildung 2 rechts). Auch der Fluchtpunkt der Zentralperspektive in Abbildung 3 verschwindet (rechts).

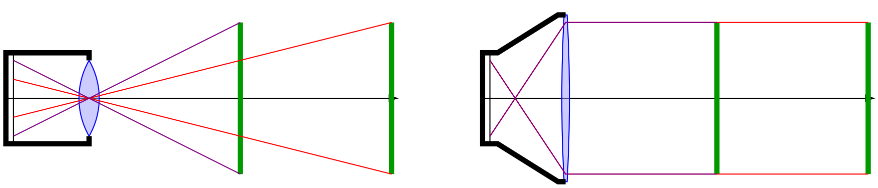

Abbildung 1: Abbildung durch ein konventionelles Objektiv (links) und ein telezentrisches Objektiv (rechts). Die von den sich kreuzenden Strahlen herrührende Perspektive führt dazu, dass gleich große Objekte in unterschiedlicher Entfernung verschieden groß abgebildet werden. Ein telezentrisches Objektiv beobachtet das Objekt mit parallelen Strahlen, gleich große Objekte werden gleich groß abgebildet.

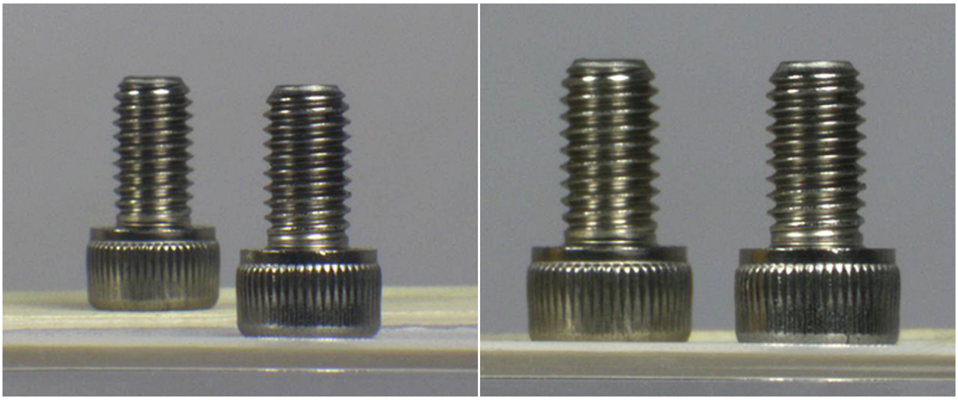

Abbildung 2: Ein Standardobjektiv (links) bildet verschieden weit entfernte Objekte verschieden gross ab. In ein telezentrisches Objektiv (rechts) fallen die Lichtstrahlen von den Gegenständen parallel ein, so dass sie unabhängig von der Entfernung gleich gross erscheinen.

Bilderquelle: https://www.thorlabs.com/newgrouppage9.cfm?objectgroup_id=10762

Abbildung 3: Abbildung durch ein gewöhnliches Objektiv links zeigt Perspektive. Die gleichen Gegenstände werden von einem telezentrischen Objekti so abgebildet, wie man sie aus dem unendlichen sehen würde, ganz ohne perspektivische Verzerrung.

Bildquelle: https://www.canrilloptics.com/design-principle-and-technical-advantages-of-telecentric-lens.html

Abbildung 4: Bitelezentrisches Objektiv mit einem Durchemsser mit 208 mm Druchmesser. Derart grosse Objektivdurchmesser sind für die Abbildung grosser Gegenstände notwendig.

Bildquelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Telezentrisches_Objektiv

Nicht nur im Gegenstandsraum, auch auf der Bildebene kann gewünscht sein, dass die Lichtstrahlen parallel auf den Sensor auftreffen. Dies hat den Vorteil, dass alle Pixel des Bildsensors aus dem gleichen Winkel belichtet werden. Die Empfindlichkeit der Pixel des Sensors kann vom Einfallswinkel abhängen und auch die Farbempfindlichkeit kann beeinflusst werden.

Ein *telezentrisches Objektiv* verwendet parallele Lichtstrahlen für die Abbildung. Werden nur im Gegenstandsraum parallele Strahlen verwendet, spricht man von einem *objekttelezentrischen* Objektiv. Ein *bildtelezentrisches* Objektiv verwendet parallele Strahlen nur bei der Projektion auf den Sensorchip. Es korrigiert also keine perspektivischen Verzerrungen, verhindert aber ungünstige Einfallswinkel auf dem Sensor. Ein *bitelezentrisches* Objektiv verwendet sowohl im Gegenstandsraum wie auch im Bildraum parallele Strahlen.

Ein Nachteil im Objektraum telezentrischer Objektive wird schon aus der schematischen Darstellung von Abbildung 1 erkennbar. Der Durchmesser des abbildbaren Bildraumes ist begrenzt durch den Durchmesser des Objektivs. Objekttelezentrische Objektive können nur Gegenstände abbilden, die kleiner sind als der Objektivdurchmesser. Daher können telezentrische Objektiv sehr gross werden, wie Abbildung 4 zeigt.

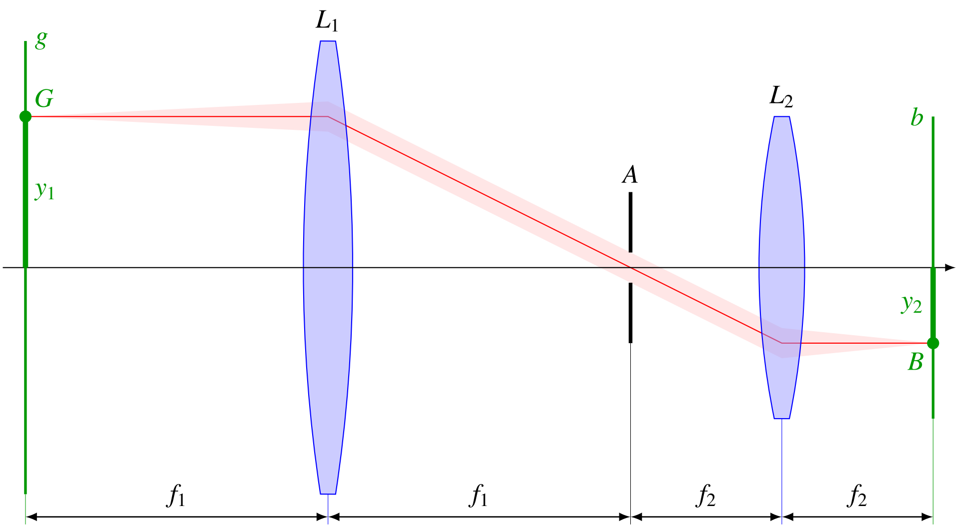

Abbildung 5: Ein einfaches bitelezentrisches Objektiv.

2 Zwei telezentrische Optiken

Um die Perspektive zu eliminieren, muss das Objektiv die Weltpunkte so abbilden, als wären sie unendlich weit entfernt, sodass die vom Objekt ausgehenden Strahlen parallel sind. Abbildung 5 zeigt eine mögliche Realisierung eines sehr einfachen derartigen Objektivs. Ein achsparallel vom Punkt G ausgehender Strahl wird von der ersten Linse L_1 mit Brennweite f_1 zum Brennpunkt bei A auf die optische Achse gebrochen. Die zweite Linse L_2 mit Brennweite f_2 bricht den Strahl wieder so, dass er auf der Bildebene b im Punkt B achsparallel auftrifft. Es handelt sich also um ein bitelezentrisches System.

Noch etwas einfacher ist das objekttelezentrische Objektiv von Abbildung 6. Die Linse L_2 wird da bereits im Punkt A angebracht. Sie fokussiert das Licht auf die Bildebene im Abstand f_2. Dieses System kann etwas kürzer gebaut werden.

3 Modellierung mit Matrixoptik

Für die Modellierung des Systems verwenden wir die Approximation einer dünnen Linse. Eine Linse mit Brennweite f hat nach Satz 3.52 die Transfermatrix

$$L_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{pmatrix}.$$

Für die Ausbreitung des Lichstrahls über die Distanz l wird die Matrix

$$T_l = \begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

verwendet.

3.1 Das bitelezentrische System

Die Blende an der Stelle A erzwingt, dass der Lichtstrahl an dieser Stelle die optische Achse kreuzt. Das vom Punkt G ausgehende Licht wird von der Matrix

$$T_1 = T_{f_1} L_{f_1} T_{f_1}$$

abgebildet. Wir multiplizieren dieses Matrizenprodukt aus:

$$\begin{aligned} T_1 &= \begin{pmatrix} 1 & f_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & f_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & f_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & f_1 \\ -1/f_1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & f_1 \\ -1/f_1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Damit ein vom Punkt G ausgehender Strahl bei A die optische Achse kreuzt, muss T_1 den Strahl auf einen Strahl mit Höhe 0 über der optischen Achse abbilden:

$$T_1 \begin{pmatrix} y_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & f_1 \\ -1/f_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1\alpha_1 \\ -y_1/f_1 \end{pmatrix}.$$

Die Höhe über der optischen Achse steht in der ersten Komponente. Diese verschwindet genau dann, wenn $\alpha_1 = 0$ ist. Die Blende stellt also sicher, dass nur Strahlen durch das Objektiv passieren können, die vom Objektpunkt G parallel zur optischen Achse ausgehen.

Die zweite Linse wirkt analog mit der Matrix

$$T_2 = \begin{pmatrix} 0 & f_2 \\ -1/f_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Der Strahl trifft daher als

$$T_2 T_1 \begin{pmatrix} y_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & f_2 \\ -1/f_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1\alpha_1 \\ -y_1/f_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y_1 f_2/f_1 \\ -f_1\alpha_1/f_2 \end{pmatrix} \tag{1}$$

in der Bildebene b ein. Ist der Strahl zu Beginn parallel zur optischen Achse, also $\alpha_1 = 0$, dann ist auch der ankommende Strahl parallel zur optischen Achse.

Bis jetzt haben wir nur die Strahlen betrachtet, die bei A durch die optische Achse gehen. Mit der Abbildungsgleichung (1) können wir aber auch andere Strahlen berechnen. Jeder vom Punkt G in der Gegenstandsebenen g ausgehende Strahl kommt in der Bildebene auf der Höhe $-y_1 f_2/f_1$ an, wenn der von der Blende durchgelassen wird. Der Punkt G wird als scharf in den Punkt B abgebildet. Das kopfstehende Bild in der Bildebene ist um den Faktor f_2/f_1 vergrößert.

Ein Strahl, der den Punkt G im Winkel α_1 verlässt, kommt in B unter einem Winkel $\alpha_1 f_1/f_2$ an, der Öffnungswinkel des im Punkt G eintreffenden Lichtkegels wird um den Faktor f_1/f_2 verkleinert..

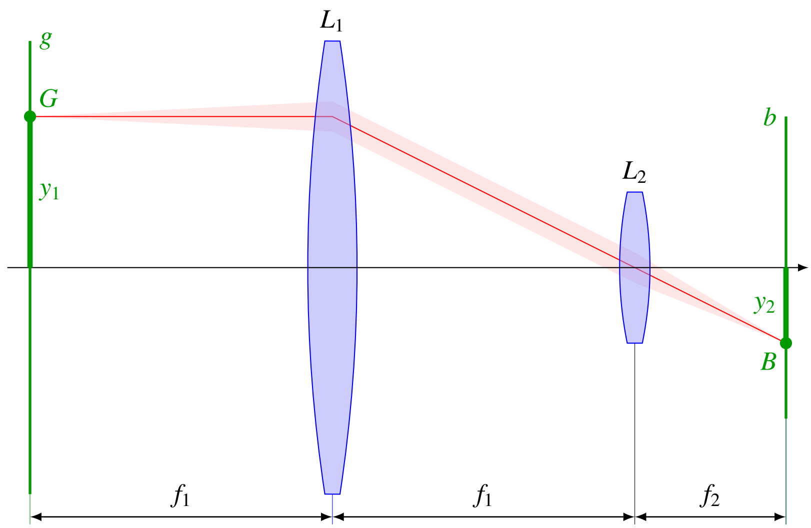

Abbildung 6: Ein einfaches objekttelezentrisches Objektiv.

3.2 Das objekttelezentrische System

Das nur objekttelezentrische System von Abbildung 6 verwendet statt der Matrix T_2 nur die direkte Abbildung mit der Linse L_2 in die Bildebene b im Abstand f_2. Dazu muss statt der Matrix T_2 das Produkt

$$T_2' = T_{f_2} L_2 = \begin{pmatrix} 1 & f_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f_2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & f_2 \\ -1/f_2 & 1 \end{pmatrix}$$

verwendet werden. Die Zusammensetzung von T_1 mit T_2' ist

$$T_2' T_1 = \begin{pmatrix} 0 & f_2 \\ -1/f_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & f_1 \\ -1/f_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f_2/f_1 & 0 \\ -1/f_1 & -f_1/f_2 \end{pmatrix}.$$

Der von G ausgehende Strahl wird in der Bildebene zu

$$T_2' T_1 \begin{pmatrix} y_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f_2/f_1 & 0 \\ -1/f_1 & -f_1/f_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y_1 f_2/f_1 \\ -y_1/f_1 - \alpha_1 f_1/f_2 \end{pmatrix}.$$

Man kann auch in diesem Beispiel erkennen, dass alle Strahlen unabhängig vom Winkel α_1 in den Punkt im Abstand $y_1 f_2/f_1$ in der Bildebene abgebildet werden. Es entsteht wieder ein scharfes Bild. Der Winkel, mit dem die Lichtstrahlen auf der Bildebene auftreffen, wird aber von y_1 und der Brennweite f_1 bestimmt. Dazu kommt dann noch der Winkel α_1, der mit dem Faktor f_1/f_2 vergrössert wird.